CAPÍTULO 12

DERIVADA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

12.1 FUNCIONES IMPLÍCITAS

En el curso de precálculo del 4º semestre se vieron diferentes clasificaciones de las funciones, entre ellas las *funciones explícitas* y las *funciones implícitas*. Recordando: Una función está escrita en forma *explícita* cuando su variable dependiente (por lo general, la *ye*) está despejada. Los siguientes ejemplos se refieren a funciones escritas en forma *explícita*:

$$y = 3x^2 - 11x - 9$$

$$y = x^2 \tan\left(x^3 - 22\right)$$

$$y = e^{6x^2}\left(\tan x - \cos 2x\right)$$

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^6 - 9x}}$$

Si por el contrario, su variable dependiente (por lo general, la *ye*) no está despejada, se dice que está escrita en forma *implícita*. Los siguientes ejemplos muestran casos de funciones escritas en forma *implícita*:

$$x^3 - y^3 = xy - 8$$
$$tan\left(x - 4y\right) = 3x + y^4$$
$$5x^2 - 7xy + 9x - y^2 + 22y - 6 = 0$$
$$y = arc\ sen\sqrt{x^4 - y^2}$$

Una función escrita en forma implícita puede estar así por dos razones: una, porque la variable dependiente (por lo general, la *ye*) sea algebraicamente imposible despejarla, como cuando aparece como parte de algún argumento al mismo tiempo que no es parte de algún argumento. Por ejemplo, en $4y = sen\left(2x - y^2\right)$ la variable dependiente *ye* aparece como parte del argumento del *seno* y además como no argumento en $4y$. La otra razón es simplemente porque así convino escribirla, como en $x^2 + 3y + 5 = 0$ (se podría despejar la *ye*)

Para obtener la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función implícita se emplean las mismas fórmulas y las mismas reglas de derivación estudiadas hasta ahora, en donde debe tenerse solamente el cuidado de tratar a la variable dependiente *ye* exactamente como una variable. Dicho de otra forma, la variable dependiente *ye* ocupará el lugar de la u en algunas fórmulas.

Por ejemplo, para derivar la variable *ye* a alguna potencia, como y^3, debe utilizarse la fórmula (6) de la potencia, en donde $u = y$ y $n = 3$, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}y^3 = \underbrace{3}_{n}\ \underbrace{y}_{u}^{\underbrace{3-1}_{n-1}}\ \underbrace{\frac{d}{dx}y}_{\frac{d}{dx}u}$$

por lo tanto

$$\boxed{\frac{d}{dx}y^3 = 3y^2\frac{dy}{dx}}$$

Para derivar x^6y^3 debe emplearse la fórmula (7) del producto uv, en donde $u = x^6$ y $v = y^3$, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}x^6y^3 = \underbrace{x^6}_{u}\;\underbrace{\frac{d}{dx}y^3}_{\frac{d}{dx}v} + \underbrace{y^3}_{v}\;\underbrace{\frac{d}{dx}x^6}_{\frac{d}{dx}u}$$

Para derivar y^3 debe seguirse el procedimiento visto en la página anterior. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}x^6y^3 = x^6\left[3y^2\frac{d}{dx}y\right] + y^3\left[6x^5\right]$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^6y^3 = 3x^6y^2\frac{dy}{dx} + 6x^5y^3}$$

En general, para obtener la derivada $\frac{dy}{dx}$ de cualquier función implícita puede seguirse la siguiente regla:

Para derivar funciones implícitas:

1) *Derivar ambos miembros de la igualdad con las mismas fórmulas antes vistas.*

2) *Despejar* $\frac{dy}{dx}$ *, para lo cual:*

   a) *Escribir en el lado izquierdo de la igualdad todos los términos que contengan a la derivada y del lado derecho todos los que no la contengan.*

   b) *Factorizar en el lado izquierdo* $\frac{dy}{dx}$ *y despejarla.*

Ejemplo 1: Obtener $\frac{dy}{dx}$ si $5xy^7 - y^3 = 9x + 4y$

Solución: Paso 1: Aplicando el operador derivada en ambos miembros de la igualdad

$$\frac{d}{dx}\left(5xy^7 - y^3\right) = \frac{d}{dx}\left(9x + 4y\right)$$

$$\frac{d}{dx}5xy^7 - \frac{d}{dx}y^3 = \frac{d}{dx}9x + \frac{d}{dx}4y$$

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left(5xy^7\right)}_{uv} - \frac{d}{dx}\underbrace{y^3}_{u^n} = \frac{d}{dx}9x + \frac{d}{dx}\underbrace{4y}_{c\frac{d}{dx}u}$$

son de la forma uv, u^n, $c\frac{d}{dx}u$

$$\underbrace{5x}_{u}\,\underbrace{\frac{d}{dx}y^7}_{\frac{d}{dx}v} + \underbrace{y^7}_{v}\,\underbrace{\frac{d}{dx}5x}_{\frac{d}{dx}u} - \underbrace{3}_{n}\,\underbrace{y}_{u}^{\overbrace{3-1}^{n-1}}\,\underbrace{\frac{d}{dx}y}_{\frac{d}{dx}u} = 9 + 4\frac{dy}{dx}$$

$$5x\left[7y^6\frac{d}{dx}y\right] + y^7\left[5\right] - 3y^2\frac{d}{dx}y = 9 + 4\frac{d}{dx}y$$

$$35xy^6\frac{dy}{dx} + 5y^7 - 3y^2\frac{dy}{dx} = 9 + 4\frac{dy}{dx}$$

Paso 2a: Escribiendo en el lado izquierdo todos los términos que contengan a la derivada y del lado derecho los que no lo contengan:

$$35xy^6\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 9 - 5y^7$$

Paso 2b: Factorizando $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}\left(35xy^6-3y^2-4\right)=9-5y^6$$

despejando $\frac{dy}{dx}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{9-5y^7}{35xy^6-3y^2-4}}$$

Ejemplo 2: Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$ si $y=x\,ln\,y+sen\,3x$

Solución: Debe tenerse cuidado con casos como éste. Aparentemente la variable *ye* está despejado por aparecer del lado izquierdo como único término, pero realmente no está despejada por el hecho de volver a aparecer en el lado derecho. Por lo tanto, es una función implícita.

Paso 1: Derivando en ambos lados de la igualdad

$$\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}\left(x\,ln\,y+sen\,3x\right)$$

son de la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\underbrace{x\,ln\,y}_{uv}+\frac{d}{dx}\underbrace{sen\,3x}_{sen\,u}$$

$$\frac{dy}{dx}=\underbrace{x}_{u}\underbrace{\frac{d}{dx}ln\,y}_{\frac{d}{dx}v}+\underbrace{ln\,y}_{v}\underbrace{\frac{d}{dx}x}_{\frac{d}{dx}u}+\underbrace{cos\,3x}_{cos\,u}\underbrace{\frac{d}{dx}3x}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\frac{dy}{dx}=x\left[\frac{\frac{d}{dx}y}{y}\right]+\ ln\,y\left[1\right]\ +\ cos\,3x\left[3\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=x\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y}\right]\ +\ ln\,y\ +\ 3\,cos\,3x$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx}\ +ln\,y+3\,cos\,3x$$

Paso 2a: Escribiendo en el lado izquierdo los términos que contienen a la derivada y del derecho los que no la contienen

$$\frac{dy}{dx}-\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=ln\,y+3\,cos\,3x$$

Paso 2b: factorizando la derivada:

$$\frac{dy}{dx}\left(1-\frac{x}{y}\right)=ln\,y+3\,cos\,3x$$

y finalmente despejando la derivada:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ln\,y+3\,cos\,3x}{1-\frac{x}{y}}$$

Por las reglas de escritura, como no debe dejarse el resultado como una fracción compleja, es decir, fracción sobre fracción, entonces para quitar el denominador parcial *ye* (en $\frac{x}{y}$) basta multiplicar numerador y denominador por *ye*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\ln y + 3\cos 3x)}{y\left(1 - \frac{x}{y}\right)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y + 3y\cos 3x}{y - x}}$$

Ejemplo 3: Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $3x^2 + 5y^3 - 4x - y + 3 = 0$

Solución: Paso 1: Derivando en ambos lados:

$$\frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}5y^3 - \frac{d}{dx}4x - \frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}3 = \frac{d}{dx}0$$

$$6x + 15y^2\frac{dy}{dx} - 4 - \frac{dy}{dx} = 0$$

Paso 2a: Escribiendo en el lado izquierdo los términos que contienen a la derivada y del derecho los que no la contienen:

$$15y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 4 - 6x$$

Paso 2b: factorizando la derivada:

$$\frac{dy}{dx}(15y^2 - 1) = 4 - 6x$$

y finalmente despejando la derivada:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 6x}{15y^2 - 1}}$$

EJERCICIO 12.1

Obtener la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas:

1) $4xy^8 = 5x^2 - 7y$

2) $6y + 3x = 9 - 4x^2y^3$

3) $y^2 - y = x^2 - x$

4) $11x^6y - 11xy^6 = 3x - 12$

5) $2xy - 7x + 6y = y^3 - 8x^5$

6) $x^3 - y^4 = 4x^6y^2$

7) $y = 2x^3 + 7y^6$

8) $y = y^4 - x^4$

9) $y = e^x + e^y$

10) $y = \dfrac{2x}{3y} - x^7$

11) $ln\, y + ln\, x = y - x$

12) $ln\, xy = xy$

13) $sen\ xy = xy$

14) $cos(2x - 3y) = 2x - 3y$

15) $tan(x^2 - 3y) = x^2 + 3y$

16) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2} = 0$

17) $\sqrt{x - y} = xy$

18) $y\, ln\, x + x\, ln\, y = 0$